Πανεπιστημιο Ιωαννινων, Τμημα Μαθηματικων,
Αριθμητικη Επιλυση Συνηθων Διαφορικων Εξισωσεων

Ιούνιος 2018

Θέματα

1. (α) Θεωρήστε το πρόβλημα δοκιμής. (*i*) Με τη βοήθεια του προβλήματος δοκιμής να εκτιμήσετε το διάστημα απόλυτης ευστάθειας για τη μέθοδο του Euler και για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. (*ii*) Να σχεδιάσετε την περιοχή απόλυτης ευστάθειας για τις δύο παραπάνω μεθόδους.

(β) Έστω $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = -(y(t))^3 + \phi(t), \ \ t \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με τη μέθοδο του τραπεζίου, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, 1]$ με βήμα h. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

2. (α) Θεωρούμε μια μέθοδο Runge-Kutta για την οποία ισχύει ότι: $\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N-1} |\delta^n| \leqslant \tilde{C}h^{p+1}$, $\tilde{C}$: σταθερά ανεξάρτητη του h. Να δείξετε ότι $\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} |y(t^n) - y^n| \leqslant \dfrac{\tilde{C}}{C'}\left[e^{C'(b-a)} - 1\right] h^p$, με $C' = LC\sum\limits_{i=1}^{q} |b_i|$, σταθερά ανεξάρτητη του h. Είναι γνωστό ότι αν ρ^i, $i = 0, 1, ..., N-1$ δοσμένοι αριθμοί, τότε υπάρχουν C_1, C_2 σταθερές ανεξάρτητες του h, έτσι ώστε $\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} |y^n - z^n| \leqslant C_1 |y^0 - z^0| + \dfrac{C_2}{h} \max\limits_{0\leqslant n\leqslant N-1} |\rho^n|$, η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz και οι f, y είναι ομαλές συναρτήσεις.

(β) Να δείξετε ότι η μέθοδος Runge-Kutta με μητρώο:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & 1 \end{array}$$

, έχει τάξη ακρίβειας ένα.

3. (α) Να δειχθεί ότι η μέθοδος Adams-Moulton είναι συνεπής. Είναι η μέθοδος ευσταθής;

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{24}(9f^{n+1} + 19f^n - 5f^{n-1} + f^{n-2}).$$

(β) Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών,

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \ \ x \in [a, b], \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

με $q, f \in C[a, b]$ και η q λαμβάνει μη αρνητικές τιμές στο $[a, b]$. Να δώσετε μια μέθοδο με την βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών που να επιλύει αριθμητικά το παραπάνω σύστημα. Πότε έχει μοναδική λύση το διακριτό ανάλογο που προκύπτει;

4. (α) Να γραφεί η μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης ($RK4$) αν το μητρώο της μεθόδου είναι:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & \end{array}$$

(β) Εφαρμόζοντας την μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης να δειχθεί ότι: $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi$. Σκιαγραφήστε τον κώδικα που να επιλύει με την $RK4$ το πρόβλημα δοκιμής.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλη Επιτυχια!